

2022-2023 учебный год



МАТЕМАТИКА

ОТВЕТЫ РЭ-2023

7 класс

Максимальное количество баллов за задания:

1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма
4	4	4	4	5	5	5	5	36

1. Максимально 4 балла.

Плюс

Рассмотрим любое число с нечётным номером. Остальные числа разбиваются на пары соседних. Значит, их сумма положительна, поэтому рассматриваемое число отрицательно. Числа с чётными номерами должны быть положительными, чтобы суммы в парах с ними были положительными. Поэтому выписано 10 отрицательных чисел и 9 положительных, их произведение положительно.

Замечание. Такая строка чисел существует, например: $-20, 21, -20, \dots, 21, -20$.

2. Максимально 4 балла.

Максим

Максим берет среднюю восьмую монету. Если второй берет k монету, то первый берет $16-k$ монету; если второй берет две монеты, то и первый берет две монеты по ранее написанному правилу и выигрывает (симметрия ходов относительно средней монеты).

3. Максимально 4 балла.

10 автомобилей

Если каждый день "отдыхает" не более одного автомобиля, то всего автомобилей не больше, чем дней недели, то есть семи. Но этого, очевидно, недостаточно. Значит, в какой-то день отдыхает два автомобиля, и в этот день нужно ещё как минимум 8 автомобилей. Итого 10. Мы доказали, что меньше, чем десять автомобилями обойтись нельзя.

Десяти автомобилей достаточно: например, каждый рабочий день отдыхают по два автомобиля.

4. Максимально 4 балла.

5 божьих коровок

Если первая божья коровка говорит правду, то вторая и третья тоже должны говорить правду, так как у них на спинах должно быть столько же точек, сколько у первой. Но вторая и третья коровки противоречат друг другу, значит, по крайней мере, одна из них лжёт. Следовательно, первая божья коровка также лжёт.

Пусть каждая из первых трёх божьих коровок солгала, тогда солгали и все остальные, так как из этих троих ни одна не сказала правду. Значит, все божьи коровки – лгуны. Но в этом случае первая божья коровка все-таки сказала правду, чего быть не может. Следовательно, первые три коровки не могут солгать одновременно, поэтому либо вторая, либо третья сказала правду, а две другие – лгуны. Таким образом, каждая из остальных божьих коровок сказала правду.

Следовательно, есть две божьи коровки, у которых по четыре точки на спине, и несколько божьих коровок, у которых на спине по шесть точек, а в сумме на спинах у всех коровок либо 30 точек, либо 26. Но $30 - 2 \cdot 4 = 22$, что не делится на 6, поэтому точек 26, а честных коровок $(26 - 2 \cdot 4) : 6 = 3$. Значит, на полянке собралось пять божьих коровок.

5. Максимально 5 баллов.

216

Пусть N_a – количество треугольников, у которых одна из сторон параллельна стороне BC исходного треугольника.

Аналогично определим числа N_b , N_c , $N_{a,b}$, $N_{b,c}$, $N_{a,c}$ и $N_{a,b,c}$.

Через N обозначим общее число треугольников.

Тогда $N = 7^3$, $N_a = N_b = N_c = 7^2$, $N_{a,b} = N_{b,c} = N_{a,c} = 7$, $N_{a,b,c} = 1$.

Искомое число находится по формуле включений и исключений:

$$7^3 - 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 - 1 = 6^3.$$

6. Максимально 5 баллов.

Разобьём гирьки на пары с разностью 20 г: (1, 21), (2, 22), ..., (20, 40). Если на весах окажется ровно по одной гирьке из каждой пары, тогда (независимо от выбора гирек в парах) вес нечётной чашки сравним с нулем по модулю 20, а вес чётной сравним с 10 по модулю 20. Противоречие.

7. Максимально 5 баллов.

Верно

Предположим, что первый треугольник – неравнобедренный, α , β и γ – его углы, а суммы $\alpha + \beta$ и $\beta + \gamma$ равны углам второго треугольника. Так как эти суммы не равны, то это – разные углы второго треугольника. Значит, сумма углов этого треугольника больше $\alpha + \beta + \beta + \gamma = 180 + \beta > 180$, что невозможно.

Таким образом, первый треугольник – равнобедренный.

8. Максимально 5 баллов.

Разделим стаканы на пары $A - A'$, $B - B'$, $C - C'$, $D - D'$, и уравниваем количества воды в каждой паре стаканов. Теперь у нас две совершенно одинаковые четверки: A, B, C, D и A', B', C', D' . Уравниваем количество воды в первой четверке, а затем точно таким же способом – во второй четверке. Итак, мы свели нашу задачу к той же самой задаче, но уже для четырех стаканов. Точно также разделим четыре стакана по парам и, уравнив количества воды в этих парах, сведем задачу к случаю двух стаканов. Но в двух стаканов количества воды можно уравнивать по условию.